Web Appendix　７．１　分散化のメリット

【７．２節】

A７．１．１ 安全資産と危険資産から成るポートフォリオのリターンとリスク

【７．２．３節，p.130 参照】

----------------図 A７－１をこのあたりに挿入------------------

ここでは７．２．３節で直観的に説明した内容のうち，安全資産 A と危険資産 B とから成るポートフォリオのリターンとリスクが図７－７(ｂ)の直線 AB 上の点で表されることを説明します。資産 A と B の保有割合を，それぞれ x，1–x とします（0≦x≦1）。ここで，ポートフォリオを資産 A の保有部分と資産 B の保有部分に分けて考えてみましょう。まず危険資産 B の保有部分を考えると，x=1（資産 B だけ保有）の場合（リターン μ_B，リスク σ_B）と比べ，リターンもリスクもその x 倍，つまり $x\mu_B$ と $x\sigma_B$ になります。たとえば図 A７－１（a）には，x が x’という値を取った時の，資産 B 保有部分のリターンとリスクの組み合わせが点 X’として描かれています。図で示しているように，点 X’の高さは点 B の高さの x’倍であり，点 X’のリスクの大きさは資産 B のリスクの大きさの x’倍です。同様に，様々な値の x に関してこのリターンとリスク（$x\mu_B$，$x\sigma_B$）を図に描くと，図 A７－１（a）の点線 0B になります。

次に，安全資産 A の保有部分を考えてみましょう。資産 A を 100%保有した場合（x=0）のリターンは μ_A，リスクは 0 であり，今ポートフォリオで保有する資産 A の割合は 1–x ですから，このポートフォリオの資産 A 保有部分のリターンは $(1-x)\mu_A$，リスクは安全資産ですから 0 です。

上記 2 つの保有部分を合わせると，まずポートフォリオ全体のリターンは資産 A 保有部分のリターンと資産 B 保有部分のリターンの和になります。また，ポートフォリオ全体のリスクは資産 B 保有部分のリスクだけです。つまり，資産 B 保有部分のリターンとリスクに対し，リターンにだけ資産 A 保有部分のリターンを足した，($(1-x)\mu_A+x\mu_B$，$x\sigma_B$)，がポートフォリオ全体のリターンとリスクになります。これを図で表すと，線分 0B 上の各点から真上に $(1-x)\mu_A$ だけ移動した点として表されます。ここで，資産 A 保有部分のリターン $(1-x)\mu_A$ は，ちょうど線分 AB と線分 0B の縦方向の差を取ったものになります。たとえば，x=x’の時のリターンの上乗せ分 $(1-x')\mu_A$ は，図では線分 YX’です。結局，ポートフォリオ全体のリターンとリスクは，線分 AB で表されることが分かります。

別の説明も可能です。まず x=0，つまり安全資産 A のみからなるポートフォリオを考えます。ここで，x が少しだけ増えて $x=\varepsilon\ (>0)$ になったとしましょう。ポートフォリオ全体のリターンは μ_A から $(1-\varepsilon)\mu_A+\varepsilon\mu_B$ に変わります。差し引き $\varepsilon(\mu_B-\mu_A)$ だけの増加です。これに対してリスクはゼロから $\varepsilon\sigma_B$ に増えるので，差し引きは $\varepsilon\sigma_B$ です。ε が大きくなっても，つまり割合 x がどのように変わっても計算は同じであり，リターンの変化とリス

クの変化の比率は常に（$\mu_B-\mu_A$)対σ_B，言い換えればリターンの変化は常にリスクの変化の（$\mu_B-\mu_A$)／σ_B倍です。たとえば図Ａ７－１(ｂ)には，x がゼロ（A 点）からε'になった時（E'点），ε"になった時（E"点）が示されています。これらの点からも分かるように，x がどのような値を取ったとしても，ポートフォリオのリターンとリスクは A 点を通る傾き（$\mu_B-\mu_A$)／σ_Bの直線上にあります。この直線は線分 AB に他なりません。

A７．１．２ 相関関係

【７．２．３節，p.132 参照】

７．２．３節では，危険資産 B と C を組み合わせたポートフォリオのリターンとリスクが，2 つの危険資産の収益率の関係によって決まることも説明しました。リスクのある 2 つの危険資産の収益率の関係は，収益率を表す２つの確率変数の間の相関関係として表わされます。ここではこの相関関係について，もう少し詳しく説明します。

－－－－－－－－－－－－－－－図Ａ７－２：収益率の相関－－－－－－－－－－－－－－－－－

さまざまな相関関係の例を表したのが図Ａ７－２です。この図の縦軸は資産 B の収益率 r_B，横軸は資産 C の収益率 r_C が取りうる値を表わしており，一つ一つの点は資産 B と C の実現しうる収益率の組み合わせを表わします。たとえば資産 B と C の収益率が（r_B'，r_C'）という組み合わせで実現する可能性がある場合，その組み合わせを表したのが図の(ａ)の点 X です。この図には実現する可能性のあるすべての組み合わせが描かれているものとします。[1] 図は(1)から(5)まで５つのパネルがあります。この５つが相関関係の典型的なパターンです。

まず左上の(ａ)は，資産 B と C の収益率が**正の相関**を持つケースです。図には右上がりの楕円が書いてあり，多くの点がこの中に入っています。正の相関関係は，2 つの収益率が全体的な傾向として「一方が高（低）ければ他方も高（低）い」という関係にあることを意味しています。正の相関関係は，関係が強くなればなるほど，点の全体的な傾向を表す右上がりの楕円が細長く書けるようになります。その極端なケースとして，左下の(ｂ)にはすべての点が１本の右上がりの直線（幅の無い楕円）の上に載っており，「一方が高（低）ければ他方も<u>必ず</u>高（低）い」場合が描かれています。このケースは，**完全な正の相関**のケースと呼ばれます。

これに対して図右上の(c)に描かれているのは，資産 B と C の収益率が**負の相関**を持つケースです。この図では，２つの収益率は「一方が高（低）ければ他方は低（高）」く，点の全体的な傾向を表す楕円は右下がりになっています。負の相関の場合もその関係の強さを考えることができ，極端な場合には図の(d)のケース(あ)（黒丸）のように，「一方が高（低）

[1] なお，ここで示されているのはあくまで実際に実現しうる収益率，つまり r です。その期待値（μ）と誤解しないよう注意しましょう。

ければ他方も必ず低（高)」く，すべての点が右下がりの直線の上に並ぶ，**完全な負の相関**になります。なお，図にはケース(い)として別の完全な負の相関のケース（白丸の点）も図示されています。どちらも完全な負の相関であることからもわかるように，相関関係はあくまで 2 つの収益率が右上がりの関係にあるか右下がりの関係にあるか（そしてその関係がどれほど強いか）を表すものです。点が図のどの部分に，どの方向に向かって多く位置しているかは，相関関係では捉えられません。

最後に，これも特殊なケースですが，正の相関も負の相関も全くない，**無相関**のケースを描いたのが図の(e)です。この図では，資産 B と C の収益率の組み合わせを示す点は，どの場所にも万遍なく位置しており，特に右上がりや右下がりの関係は見て取れません。資産 B の収益率と資産 C の収益率が，それぞれ互いの大きさとは全く関係なく決まっている場合がこうしたケースにあたります。

なお相関関係は，数学的には相関係数の大きさによって表されます。資産 B と資産 C の収益率の相関係数は，両資産の収益率の共分散を，資産 B の収益率の標準偏差と資産 C の収益率の標準偏差で割ったものであり，－1 から 1 までの値を取ります。相関係数がプラスの値になった場合は正の相関，マイナスの値になった場合は負の相関のケースで，完全な正の相関は相関係数=1，完全な負の相関は相関係数=－1，無相関は相関係数=0 のケースにあたります。

A7．１．３ ポートフォリオのリターンとリスク

【７．２．３節，p.132 参照】

ここでは，２種類の危険資産 B と C を組み合わせたポートフォリオのリターンとリスクが，図７－８(b)のようないくつかのケースに分かれることを説明します。資産 B，C の保有割合をそれぞれ y，1−y（0≦y≦1）とすると，ポートフォリオのリターンとリスク（標準偏差）は，それぞれ

$$\left(y\mu_B+(1-y)\mu_C, \sqrt{y^2\sigma_B^2+(1-y)^2\sigma_C^2+2y(1-y)\sigma_B\sigma_C\rho_{B,C}}\right)$$

になります。[2] ここで，μ_B，μ_C は資産 B と C のリターン，σ_B，σ_C は資産 B と C のリスクであり，$\rho_{B,C}$ は資産 B と C の収益率の相関係数（$-1\leqq\rho_{B,C}\leqq 1$）です（Web Appendix A７．１．２参照)。リターンの方は，資産 B と C のリターンを y で加重平均したものであり分かりやすいのですが，リスクの方はやや複雑です。ただし，平方根の中を見ると，それぞれの資産の保有比率(y)と各資産のリスク（σ_B，σ_C）だけから決まる部分（$y^2\sigma_B^2+(1-y)^2\sigma_C^2$）と，相関係数にも依存する部分（$2y(1-y)\sigma_B\sigma_C\rho_{B,C}$）とに分かれることが分かります。前者は，個々の資産の保有部分をそれぞれ独立に見た場合のリスクを

[2] 計算については大村・俊野(2000)等を見てください。

合計したものですが，後者は全体のリスクが 2 つの資産のリスクの間の関係によっても変化することを表しています。この項は，たとえ比率 y やそれぞれのリスク(σ_B，σ_C)が同じでも，相関係数が異なればリスクが変わることを意味しています。式から明らかなように，y や(σ_B，σ_C)が同じ場合でも，この項は完全な正の相関（$\rho_{B,C}=1$）のケースで最も大きく，完全な負の相関（$\rho_{B,C}=-1$）のケースで最も小さくなります。[3]

もう少し詳しく見てみましょう。まず，資産 B と C の収益率が完全な正の相関（$\rho_{B,C}$ =1）の場合には，ポートフォリオのリスクは

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2\sigma_B^2+(1-y)^2\sigma_C^2+2y(1-y)\sigma_B\sigma_C} &= \sqrt{(y\sigma_B+(1-y)\sigma_C)^2}\\ &= y\sigma_B+(1-y)\sigma_C\end{aligned}$$

となります。これは，ポートフォリオのリターンとリスクが資産 B と C のリスクに（保有割合に応じて）比例することを表しています。リターンも $y\mu_B+(1-y)\mu_C$ で資産 B と C のリターンに比例していますから，2 つの資産の収益率が完全に正の相関関係にあれば，それらを組み合わせたポートフォリオのリターンとリスクは，各資産の両者のリターンとリスクに完全に比例して決まることになります。これを図示したのが，図 7 － 8 (b)のケース 1 なのです。このときたとえば B と C を半分ずつ持つと，そのポートフォリオのリターンとリスクは線分 BC のちょうど中間の点で表されます。

これに対して相関が完全に負，つまり相関係数が $\rho_{B,C}=-1$ の場合はどうでしょうか。計算するとわかるように，ポートフォリオのリスクは

$$\sqrt{y^2\sigma_B^2+(1-y)^2\sigma_C^2-2y(1-y)\sigma_B\sigma_C}$$

となります。ここで，$(y^*,1-y^*)=\left(\dfrac{\sigma_C}{\sigma_B+\sigma_C},\dfrac{\sigma_B}{\sigma_B+\sigma_C}\right)$として，比率 y^* と $1-y^*$ でそれぞれ資産 B と C を保有した場合のリスクを計算してみましょう。上のリスクの式に $y=$

[3] なお，ポートフォリオのリターンは相関係数には依存しないので，たとえ $\rho_{B,C}$ の値が違っても，保有割合(y)や個別のリスク(σ_B，σ_C)が同じであれば，同じリターンです。

$\frac{\sigma_C}{\sigma_B+\sigma_C}$ を代入すればわかるように，リスクはちょうどゼロになります。これは，個々の資産の収益率の変動（リスクの式の平方根の中の第１項と第２項）が，負の相関関係（第３項）によって完全に打ち消されるケースにあたります。これを表したのが，図７－８(b)の点 a なのです。

最後に，相関が完全でない場合（$-1<\rho_{B,C}<1$）には，この打消しが完全には働かず，どのように y を選んでもリスクをゼロにすることはできません。しかし，負の相関関係が強い（$\rho_{B,C}$ が-1 に近い）ほど打ち消す効果が大きいために図中のケース２に近づき，正の相関関係が強い（$\rho_{B,C}$ が１に近い）ほど打ち消す効果が小さく図中のケース１に近づくのです。

参考文献

大村敬一・俊野雅司(2000)『証券投資理論入門』(日経文庫)日本経済新聞出版社